Численное дифференцирование

Пусть значение ф-ции $f(x)$ задано в узлах сетки

$$\omega_h = \left\{ x_i = a + ih,\ i = 0,1,\dots,N,\ h = \frac{b-a}{N} \right\}.$$

$f'(x)$ на ω_h можно определить 3-мя способами:

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \overset{def}{=} f'_{x,i+1/2} = f_{x,i+1/2} \equiv f_{x,i} \text{ — правая разностная производная}$$

$$f'(x_i) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h} = f_{x,i-1/2} \equiv f_{\bar{x},i} \text{ — левая —//—}$$

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = f_{x,i} \equiv f_{\mathring{x},i} \text{ — центральная —//—}$$

$$\forall x_i \quad \{ f_{x,i+1/2},\ f_{x,i-1/2},\ f_{x,i} \} \xrightarrow{h \to 0} f'(x_i) \text{ если } f(x) \text{ - гладкая}$$

Вторая производная:

$$f''(x_i) \approx \frac{f_{x,i+1/2} - f_{x,i-1/2}}{h} \overset{def}{=} f''_{xx,i} \equiv f_{xx,i} = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$$

Погрешность *аппроксимации* правой и левой производных $O(h)$:

Разложим $f(x)$ в ряд Тейлора с $\pm h$. Предположим $f \in C^2[a,b]$, остат. член возьмём в форме Лагранжа:

$$\pm\frac{h^3}{6} f''' + \frac{h^4}{24} f^{(4)}$$

$$f(x \pm h) = f(x) \pm h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_\pm), \quad \xi_+ \in (x, x+h),\ \xi_- \in (x-h, x).$$

Правая разн. произв. в x_i:

$$f_{x,i+1/2} = f'(x_i) + \frac{h}{2} f''(\xi_+); \quad z'_{i+1/2} = f_{x,i+1/2} - f'(x_i) = \frac{h}{2} f''(\xi_+) = O(h) \text{ при } h \to 0.$$

левая разн. произв. в x_i:

$$f_{x,i-1/2} = f'(x_i) - \frac{h}{2} f''(\xi_-); \quad z'_{i-1/2} = -\frac{h}{2} f''(\xi_-) = O(h) \text{ при } h \to 0.$$

M_2

Для центральной производной $O(h^2)$:

$$f_{x,i}' = f'(x_i) + \frac{h^2}{6} \overbrace{f'''(\xi)}^{M_3}, \qquad \xi \in (x_i - h, x_i + h)$$

Для второй производной $O(h^2)$,:

$$\left| f_{xx,i} - f''(x_i) = \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_i) \right| = O(h^2)$$

Влияние вычислительных погрешностей

Для правой или левой производной с учётом вычислительных погрешностей $\pm\delta$ производная

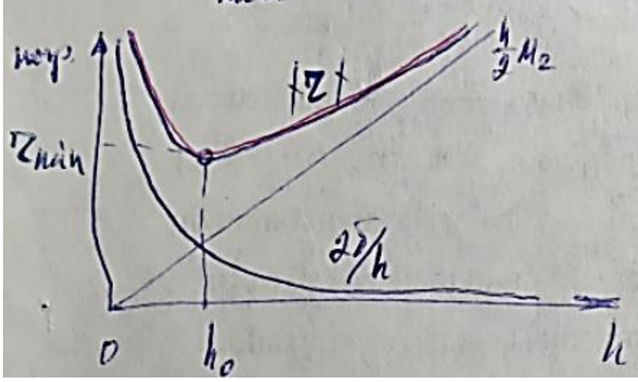
$$f'(x) = \frac{f_{i+1} + \delta - f_i + \delta}{h} + \frac{h}{2} M_2$$

$$= f_{x,i+1/2} + \frac{2\delta}{h} + \frac{h}{2} M_2$$

$|r|$ = Погрешность вычислений + Погрешность аппроксимаций

$\Rightarrow |r| \not\to 0$ при $h \to 0$.

$\exists\ r_{min} \neq 0$ с шагом h_0, увелич. или уменьш. h ⇒ возраст. погрешн.



Найдём h_0 и r_{min} ⇒ $|r|'_h = 0$

$\Rightarrow h_0 = 2\sqrt{\frac{\delta}{M_2}}, \quad r_{min} = 2\sqrt{\delta M_2}$

Вычисления необходимо производить с шагом $h \geq h_0$

увеличение h даёт меньшие погрешности, чем уменьшение.